Kapitel 7: Strömungsprozesse

7.1 Definition von Strömungsprozessen

- In der Drossel von Kältemaschine und Wärmepumpe kommt es zu einer Zustandsänderung, die ohne Zu- und Abfuhr von Wärme oder Arbeit erfolgt; ähnliche Effekte treten z.B. auch in jeder Rohrleitung auf
- In vollständiger Schreibweise lautet der 1. Hauptsatz für stationäre Fließprozesse

$$w_{t,12} + q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right)$$

- Stationäre Fließprozesse ohne Zu- oder Abfuhr von Arbeit ($w_{t,12}$ = 0) werden als (stationäre) **Strömungsprozesse** bezeichnet

$$\Rightarrow \quad q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right)$$

- Strömungsprozesse ohne Zu- oder Abfuhr von Wärme werden als **adiabate Strömungsprozesse** bezeichnet

$$\Rightarrow \quad h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right) = 0$$

⇨ Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik ermöglicht auch Aussagen über Strömungsphänomene

7.1.1 Einschränkungen

- **Aber:** Die klassische phänomenologische (Gleichgewichts-)Thermodynamik beruht auf der Betrachtung von Phasen mit konstanten Zustandsgrößen, die exakte Betrachtung von Strömungen erfordert eine räumlich aufgelöste Betrachtungsweise
- Allein mit den Hilfsmitteln der Thermodynamik sind nur begrenzte „globale Betrachtungen“ möglich, detaillierte Betrachtungen bleiben der **Strömungs- bzw. Fluidmechanik** vorbehalten – die beiden Fachgebiete sind jedoch eng miteinander verknüpft
- Um allein mit den Mitteln der Thermodynamik Aussagen treffen zu können, werden folgende Annahmen getroffen

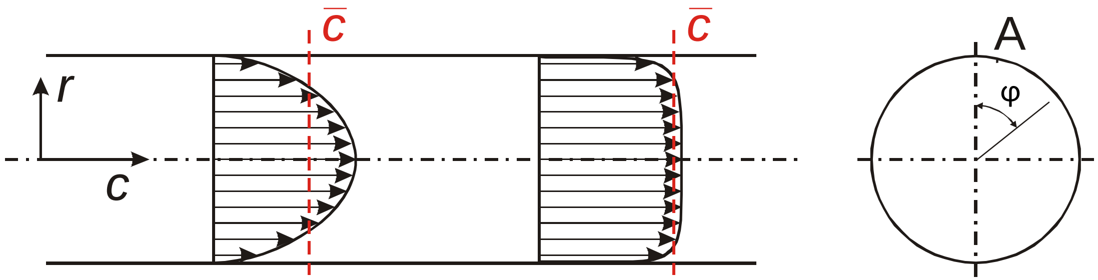
  1. Die Strömung ist im Wesentlichen eindimensional, parallel zur Rohrachse oder allgemeiner zur einer Symmetrieachse
  2. Die Strömung ist stationär, d.h. an keiner (ortsfesten) Stelle des Systems ändern sich Zustandsgrößen mit der Zeit
  3. Alle Zustandsgrößen (T, p, c, …) sind über den Strömungsquerschnitt konstant

- Die Annahmen 1 und 2 gelten in guter Näherung für viele technische Prozesse
- Die Annahme 3 gilt praktisch nie ⇨ **Verwendung von Mittelwerten**

7.1.2 Definition von Mittelwerten

- Mittelwerte für stationäre Strömungsprozesse müssen so definiert werden, dass
  - die Massenbilanz ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$) und
  - die Energiebilanz (1. Hauptsatz) erfüllt sind

- Definition der mittleren Geschwindigkeit



„laminares" „turbulentes"
Strömungsprofil

- Für den Massenstrom mit einer mittleren Geschwindigkeit $\overline{c}$ gilt

$$\dot{m} = \int_A c(r,\varphi)\,\rho(r,\varphi)\,dA \equiv \overline{c}\cdot\overline{\rho}\cdot A$$

- Temperatur T und Druck p sind bei stationären adiabaten Strömungen über den Rohrquerschnitt meist in guter Näherung konstant ⇨ $\overline{\rho} = \rho(T, p)$

7.1.2 Definition von Mittelwerten

- In einer stationären eindimensionalen Strömung ohne Quellen und Senken muss der Massenstrom in Strömungsrichtung an jeder Stelle gleich sein
- Definition der mittleren Geschwindigkeit entspricht der **Kontinuitätsgleichung**

$\dot{m} = \bar{c} \cdot \rho(T,p) \cdot A = c \cdot \rho \cdot A = \text{const.}$ (statt $\bar{c}, \bar{\rho}$ zur Vereinfachung wieder c, ρ)

- Die mittlere Geschwindigkeit nach der Kontinuitätsgleichung liefert aber z.B. eine falsche kinetische Energie

- Für eine mittlere Geschwindigkeit, die die korrekte kinetische Energie liefert, muss gelten

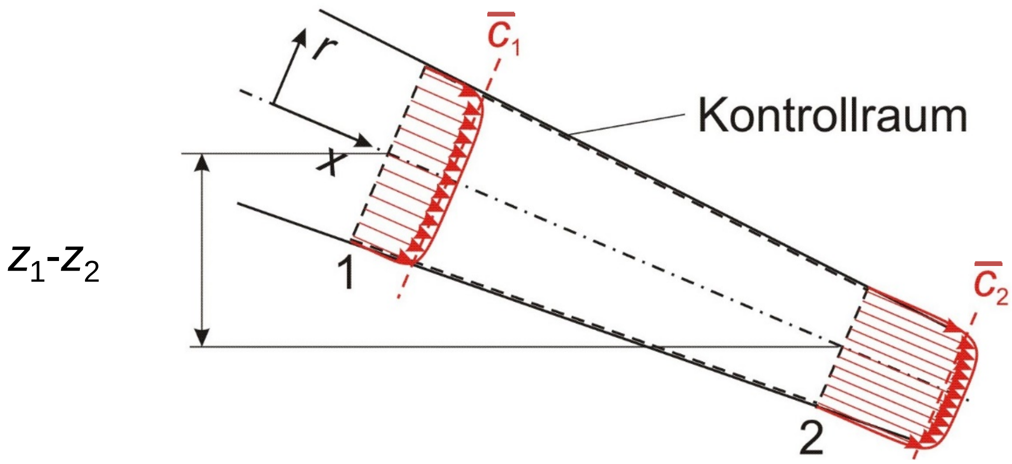
$$\int_A \tfrac{1}{2} c^2(r,\varphi)\, dA \equiv \frac{1}{2} \bar{c}_{\text{kin}}^2 \cdot A \Bigg|_{\rho(r,\varphi)=\text{const.}}$$

⇨ Mittelwerte können Strömungen nie in jeder Hinsicht korrekt beschreiben

⇨ Glücklicherweise treten in technischen Anwendungen häufig Strömungsprofile wie das skizzierte Profil einer turbulenten Strömung auf, bei denen die verschiedenen Mittelwerte für die Strömungsgeschwindigkeit nahe bei einander liegen

7.2 Schallgeschwindigkeit

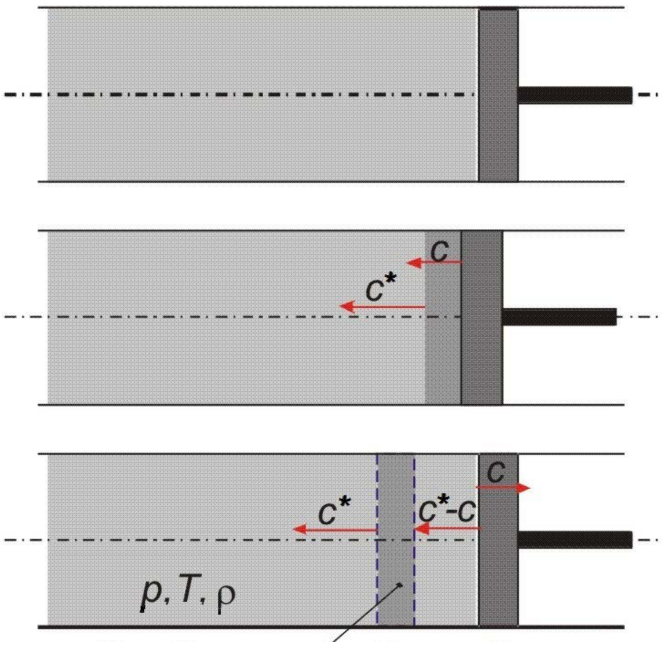
- Ein typisches Strömungsproblem



- Die Strömungs- bzw. Fluidmechanik befasst sich häufig mit inkompressiblen Strömungen (Flüssigkeiten)
- Die Stärke der thermodynamischen Betrachtung liegt darin, dass sie einfache Aussagen auch für oft anspruchsvollere, kompressible Strömungen erlaubt (Gasdynamik)

7.2 Schallgeschwindigkeit

- Fragestellung**:** Wie schnell bewegt sich eine Druckschwankung in einem kompressiblen Medium?



$p+\Delta p, T+\Delta T, \Delta\rho+\rho$ Kontrollraum

- Die Geschwindigkeit, mit der sich kleine Druckschwankungen in einem Medium ausbreiten, wird als **Schallgeschwindigkeit** bezeichnet
  - ⇨ Wasserwelle nach Steinwurf

7.2 Schallgeschwindigkeit

- Bilanzierung durch einen mit dem Kontrollraum mitbewegten Beobachter

  Kontinuitätsgleichung: $A \cdot \rho \cdot c^* = A \cdot (\rho + \Delta\rho) \cdot (c^* - c)$

  $$\Rightarrow \quad \rho \cdot c^* = \rho \cdot c^* - \rho \cdot c + \Delta\rho \cdot c^* \underbrace{-\Delta\rho \cdot c}_{\substack{\text{vernachlässigbar} \\ \text{gegenüber } \Delta\rho \cdot c^*}} \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c = \Delta\rho \cdot c^*$$

  Eintretender Impulsstrom: $\dot{m} \cdot c^* = A \cdot \rho \cdot c^{*2}$

  Austretender Impulsstrom: $\dot{m} \cdot (c^* - c) = A \cdot (\rho + \Delta\rho) \cdot (c^* - c)^2$

- Kräftegleichgewicht: Die Differenz der Impulsströme muss gleich der Differenz der Druckkräfte sein

  $$\dot{m} \cdot c^* - \dot{m} \cdot (c^* - c) = A \cdot (p + \Delta p) - A \cdot p$$

  $$\underbrace{\dot{m}}_{=Ac^*\rho} \cdot c = A \cdot c^* \cdot \underbrace{\rho \cdot c}_{=\Delta\rho \cdot c^*} = A \cdot \Delta p \quad \Rightarrow \quad c^{*2} = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}$$

- Der Ausbreitungsprozess verläuft schnell ⇨ Wärmeübertragung vernachlässigbar
- Die Druckschwankungen sind klein ⇨ Prozess kann als reversibel angesehen werden
- Die Schallausbreitung verläuft (bei nicht zu hohen Pegeln) daher reversibel adiabat

7.2 Schallgeschwindigkeit

- Für die **isentrope Schallgeschwindigkeit** gilt

$$\left.\frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right|_{\text{Schallwelle}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^* = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = v \cdot \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}}$$

- Für die reversibel adiabate Zustandsänderung ergibt sich aus $p \cdot v^{\kappa} = \text{const.}$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \underbrace{\text{const.}}_{=pv^{\kappa}} \cdot \left(-\kappa \cdot v^{-\kappa-1}\right) = -\kappa \cdot \frac{p}{v}$$

- Damit folgt für die isentrope **Schallgeschwindigkeit idealer Gase**

$$c^* = v \cdot \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{v}} = \sqrt{\kappa \cdot p \cdot v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} = \sqrt{\kappa \cdot T \cdot R_m / M}}$$

- Mit dem nur schwach von der Temperatur abhängigen Isentropenexponenten idealer Gase $\kappa^{o}(T) = c_p^{o}(T) / c_v^{o}(T)$ gilt $c^* \sim \sqrt{T}$ und $c^* \sim \sqrt{1/M}$

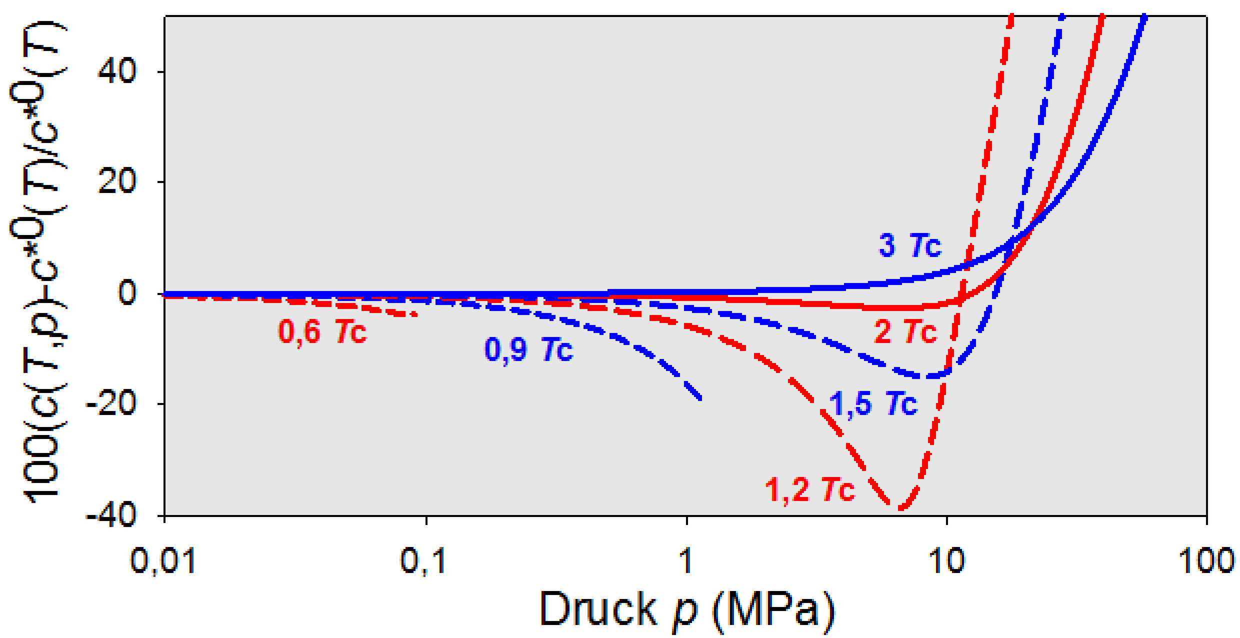
7.2 Schallgeschwindigkeit

- Außerhalb des Gasgebiets geringer Dichte weicht die Schallgeschwindigkeit weit von der des idealen Gases ab

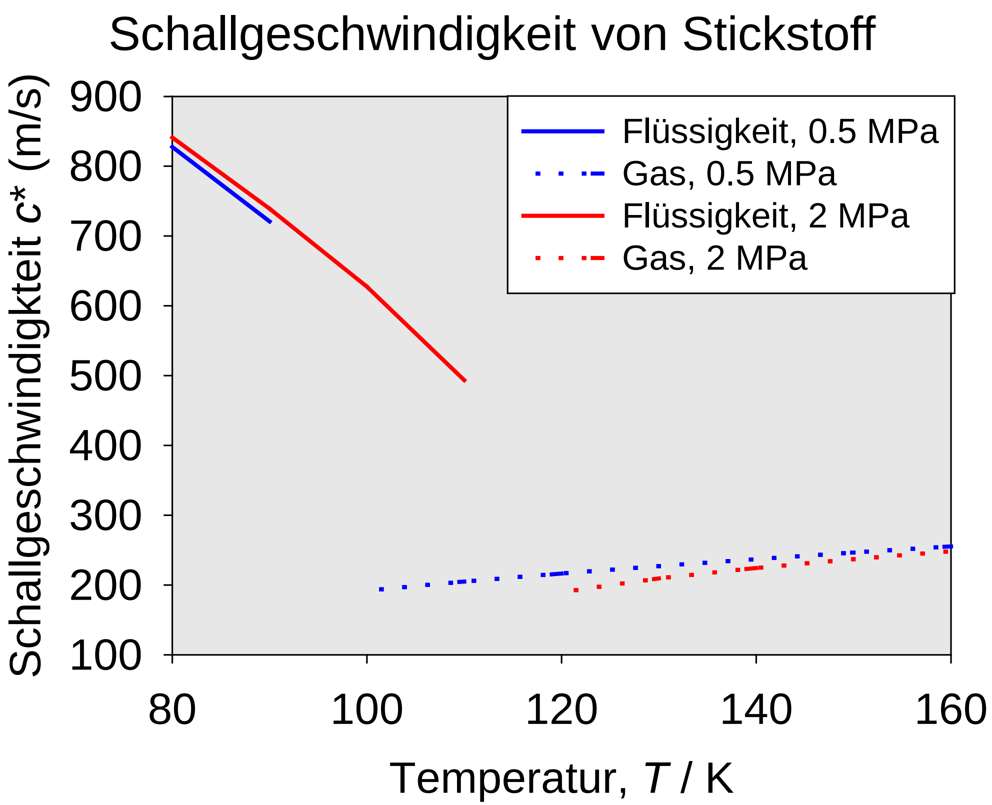
⇨ Die Schallgeschwindigkeit von Gasen wächst in erster Näherung mit der Wurzel der Temperatur

⇨ Die Schallgeschwindigkeit von Gasen mit geringer Molmasse ist besonders groß

(Bei 0°C: $c^*_{\mathrm{Luft}} \approx 333\,\mathrm{m/s}$, $c^*_{\mathrm{He}} \approx 970\,\mathrm{m/s}$)



7.2 Schallgeschwindigkeit



Beispiele

$c^*_{\text{Luft}(20°\text{C},1\text{bar})} \approx 343\,\text{m/s},\ c^*_{\text{H}_2\text{O}(\text{flüssig},\,20°\text{C},1\text{bar})} \approx 1484\,\text{m/s}$

$c^*_{\text{Stahl}(20°\text{C})} \approx 5920\,\text{m/s},\quad c^*_{\text{Diamant}\ \ (20°\text{C})} \approx 18000\,\text{m/s}$

7.3 Dissipation in adiabaten Strömungsprozessen

- Der 1. Hauptsatz für adiabate Strömungsprozesse lautet

$$h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right) = 0$$

- Der 1. Hauptsatz lautet in differenzieller Form

$$\mathrm{d}h + c\mathrm{d}c + g\mathrm{d}z = 0$$

- Für den Zusammenhang zwischen Entropieänderung, Wärme und Dissipation gilt

$$\int_1^2 T\mathrm{d}s = q_{12} + \varphi_{12} \quad \text{für adiabate Prozesse } q_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\int_1^2 v\mathrm{d}p = \varphi_{12} + \tfrac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) + g \cdot \left(z_2 - z_1\right)}$$

$$\text{für } \varphi_{12} = 0 \text{ und } \Delta z = 0 \text{ differenziell } \Rightarrow -v\mathrm{d}p = c\mathrm{d}c$$

- Die im Druck eines Fluids „gespeicherte“ Energie kann in einem Strömungsprozess in kinetische Energie, in (potentielle) Lageenergie umgewandelt, oder dissipiert werden
- Das spezifische Volumen im Integral erklärt das unterschiedliche Verhalten von Gasen (*v* groß) und Flüssigkeiten (*v* klein)

7.3 Dissipation in adiabaten Strömungsprozessen

- Darstellung von Strömungsprozessen ohne Änderung der geodätischen Höhe (dz=0) im *h,s*-Diagramm, für ideales Gas

$1 \rightarrow 2$: Beschleunigte Strömung mit Druckabbau, $c_2 > c_1$ (⇨ **Düse**)

$1 \rightarrow 2^s$: Reversibel beschleunigte Strömung, $c_{2s} > c_2$

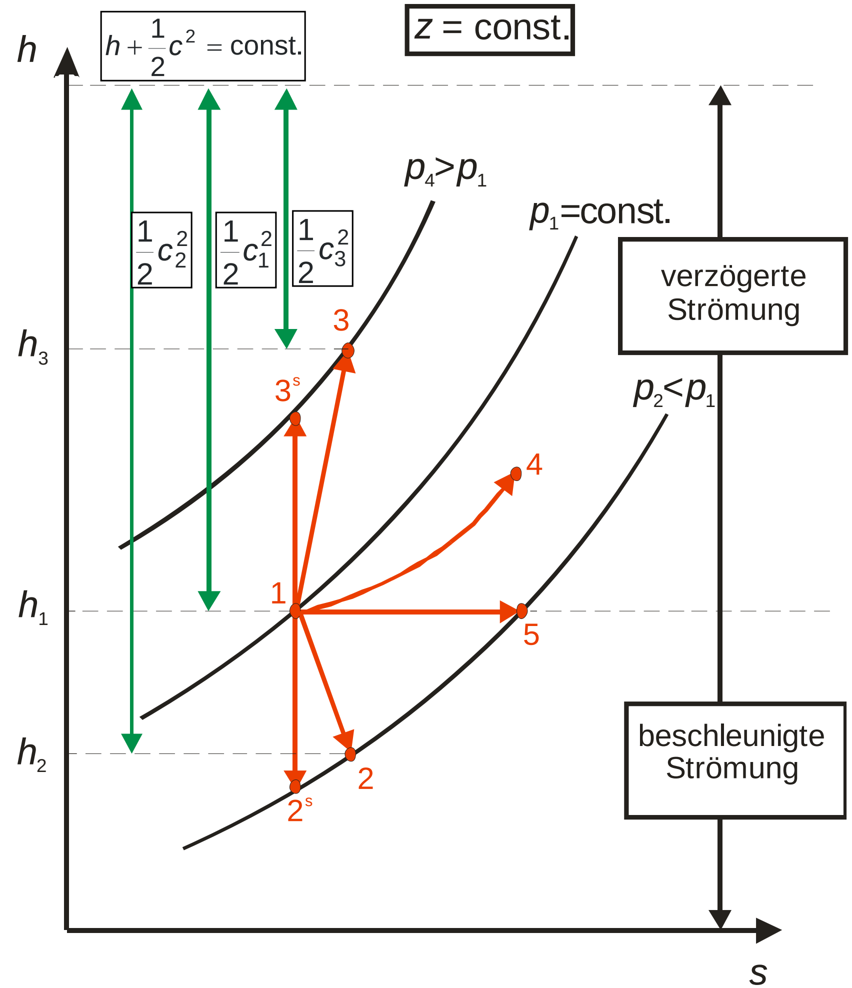
$1 \rightarrow 3$: Verzögerte Strömung mit Druckaufbau, $c_3 < c_1$ (⇨ **Diffusor**)

$1 \rightarrow 3^s$: Reversibel verzögerte Strömung, $c_{3s} > c_3$

$1 \rightarrow 4$: Verzögerte Strömung mit Druckabfall (⇨ **„schlechter“ Diffusor**)

$1 \rightarrow 5$: Sonderfall adiabate Drosselung,

$$-\int v\mathrm{d}p = \varphi_{15},\ p_5 < p_1,\ c_5 = c_1$$



7.4 Düse und Diffusor

- Düsen und Diffusoren sind wichtige Apparate in einer Vielzahl von technischen Anwendungen

  Beispiele: Düse am Eintritt, Diffusor am Austritt einer Gasturbine

- In reversibel adiabaten Strömungsprozessen kann die Geschwindigkeit des strömenden Fluids nur durch Änderungen der Querschnittsfläche des Strömungskanals verändert werden
- Aus der differentiellen Form der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad c \cdot A \cdot d\rho + \rho \cdot A \cdot dc + c \cdot \rho \cdot dA = 0$$

$$-\int_1^2 v\,dp = \frac{1}{2} \cdot \left(c_2^2 - c_1^2\right) \qquad -v\,dp = d\left(\frac{1}{2} \cdot c^2\right) = c \cdot dc$$

7.4 Düse und Diffusor

- Unter Vernachlässigung der potentiellen Energie folgt für die reversibel adiabate Strömung

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{c \cdot dc}{c^2} = \frac{dv}{v} - \frac{c \cdot dc}{c^2}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dv}{v} + \frac{v \cdot dp}{c^2}$$

- Aus $v(p,s)$ folgt: $dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \underbrace{ds}_{=0,\,\text{rev. ad.}}$

- Aus der Definition der Schallgeschwindigkeit folgt

$$c^{*2} = -v^2 (\partial p / \partial v)_s \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{v} = -\left(\frac{v^2}{c^{*2}}\right)\frac{dp}{v}$$

- Einsetzen ergibt die „Bauvorschrift“ für Düse und Diffusor

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^{*2}}\right) \cdot v dp}$$

7.4 Düse und Diffusor

- **Düse:** dc > 0, dp < 0
  $c < c^*$ ⇨ dA < 0, Düse in Strömungsrichtung verengt
  $c > c^*$ ⇨ dA > 0, Düse in Strömungsrichtung erweitert

- **Diffusor:** dc < 0, dp > 0
  $c > c^*$ ⇨ dA < 0, Diffusor in Strömungsrichtung verengt
  $c < c^*$ ⇨ dA > 0, Diffusor in Strömungsrichtung erweitert

- **Laval-Düse** (Ernst Körting, 1878, Hannover, und Carl Gustav Patrik de Laval, 1883, Schweden; seit V2 bei Raketentriebwerken) zur Beschleunigung einer Strömung von $c_1 < c^*$ auf $c_2 > c^*$: